(Aus dem Physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.)

Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik.

Von **Reinhold Fürth** in Prag.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Januar 1933.)

Es wird auf die formale Analogie zwischen den Differentialgleichungen für die Lagewahrscheinlichkeit eines mechanischen Systems nach der klassischen Statistik und der Quantenmechanik hingewiesen, die sich auch als Gleichungen für die Bewegung eines Schwarmes gleichartiger Teilchen, eine Diffusion, deuten lassen. Als physikalische Ursachen für diese Diffusion werden im klassischen Fall die Stöße der Moleküle der umgebenden Substanz, im quantenmechanischen Fall die Unschärfebeziehungen erkannt. Die kräftefreie Diffusion im letzteren Falle wird diskutiert und eine einfache Ableitung der Unschärferelation auf dieser Basis gegeben. Der Gedankengang läßt sich auf die klassische Diffusion übertragen und man kann für die Streuung der Lagen und Geschwindigkeiten eine Ungleichung ableiten, die zur Heisenbergschen Unschärfebeziehung in enger Analogie steht. Die gefundene Beziehung läßt sich auch auf ein einzelnes Teilchen und allgemeiner auf ein beliebiges mechanisches System übertragen, wo sie aussagt, daß die gleichzeitige Messung von Lage und zugehöriger Geschwindigkeit wegen der Brownschen Bewegung nur mit einer maximalen Genauigkeit möglich ist. Die Beziehung dieses Ergebnisses zu dem Problem, mit welcher Genauigkeit man mit einem mechanischen Meßinstrument eine physikalische Größe messen kann, wird erörtert, wobei es sich zeigt, daß bei sinngemäßer Auffassung auch hier eine nicht überschreitbare Genauigkeitsgrenze existiert. Zum Schluß wird die Frage, warum die klassische Diffusionsgleichung für eine reelle Dichtefunktion mit reellem Diffusionskoeffizienten, die Schrödingergleichung hingegen für eine komplexe Funktion mit imaginärem Diffusionskoeffizienten gilt, vom Standpunkt der Wellenmechanik beleuchtet und zu den Problemen der Beobachtbarkeit physikalischer Größen und der Umkehrbarkeit bzw. Nichtumkehrbarkeit der Naturvorgänge in Beziehung gesetzt.

Im folgenden soll von einigen Beziehungen zwischen der klassischen Statistik — der klassischen Diffusionstheorie und der Theorie der Brownschen Bewegung — einerseits und der Quantenmechanik andererseits die Rede sein, die sich aus formalen Gründen ergeben und, obwohl sie zum Teil manchem bekannt sein dürften, in diesem Zusammenhang meines Wissens noch nicht behandelt worden sind. Insbesondere läßt sich zeigen, daß sich die Heisenbergschen Unschärferelationen auch auf Vorgänge übertragen lassen, die von der klassischen Statistik beherrscht werden, und daß sich dadurch neue Gesichtspunkte zu der oft behandelten Frage nach der Grenze der Meßmöglichkeit mit einem Meßinstrument erbringen

lassen. Es wird ferner versucht, auch die physikalische Bedeutung der erwähnten formalen Ähnlichkeiten und Unterschiede zu präzisieren.

1. Die klassische Diffusionstheorie wird durch die verallgemeinerte Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \Delta u - \operatorname{div}(u \mathfrak{v}) \tag{1}$$

beherrscht[1]), worin $u(x, y, z, t)$ die Konzentration als Funktion von Ort und Zeit, D den (als konstant angenommenen) Diffusionskoeffizienten und $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor der durch äußere Kräfte hervorgerufenen Konvektionsströmung bedeuten. Die Lösung dieser Gleichung unter gegebenen Randbedingungen liefert die Konzentrationsverteilung in jedem künftigen Zeitpunkt, wenn die Verteilung im gegenwärtigen Zeitpunkt bekannt ist.

Deutet man den Diffusionsversuch als Kollektivversuch an einer Raumgesamtheit mit vielen, gleichartigen Teilchen, so ist $u\,\mathrm{d}V$ die relative Häufigkeit derjenigen Bestandteile der Gesamtheit, die bei diesem Kollektivversuch zur Zeit t in dem Volumenelement $\mathrm{d}V$ aufgefunden werden, wenn u der Normierungsbedingung

$$\iiint u \,\mathrm{d}V = 1 \tag{2}$$

für alle t genügt. Bei Vertauschung der Raumgesamtheit mit einer virtuellen Gesamtheit verwandelt sich die Diffusionsgleichung (1) in eine Gleichung für die „Wahrscheinlichkeitsdichte" u der Lage eines Einzelteilchens, die als Funktion der Zeit berechnet werden kann, wenn sie zur Zeit Null bekannt ist: die Smoluchowskische Differentialgleichung für die Brownsche Bewegung eines Einzelteilchens unter der Wirkung von äußeren Kräften[2]).

Es läßt sich zeigen, daß die Smoluchowskische Gleichung Spezialfall einer anderen Differentialgleichung ist, die unter sehr allgemeinen Bedingungen für die Brownsche Bewegung eines beliebigen mechanischen Systems abgeleitet werden kann und gewöhnlich als Fokker-Plancksche Differentialgleichung bezeichnet wird[3]). Sie läßt sich nach Schrödinger[4]) in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F u \tag{3}$$

---

[1]) Vgl. z. B. Frank-Mises, Differential- u. Integralgleichungen d. math. Physik **2**, 248.

[2]) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **43**, 1105, 1915.

[3]) Vgl. u. a. F. Zernike, Handb. d. Phys. Bd. III, S. 457.

[4]) E. Schrödinger, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 1931, S. 296ff. S. Ber. Berl. Akad. 1931, S. 148; vgl. auch J. Metadier, C. R. **193**, 1173, 1931.