Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie.

Von **Oskar Klein** in Kopenhagen.

(Eingegangen am 28. April 1926.)

Auf den folgenden Seiten möchte ich auf einen einfachen Zusammenhang hinweisen zwischen der von Kaluza[1]) vorgeschlagenen Theorie für den Zusammenhang zwischen Elektromagnetismus und Gravitation einerseits und der von de Broglie[2]) und Schrödinger[3]) angegebenen Methode zur Behandlung der Quantenprobleme andererseits. Die Theorie von Kaluza geht darauf hinaus, die zehn Einsteinschen Gravitationspotentiale g_{ik} und die vier elektromagnetischen Potentiale φ_i in Zusammenhang zu bringen mit den Koeffizienten γ_{ik} eines Linienelementes von einem Riemannschen Raum, der außer den vier gewöhnlichen Dimensionen noch eine fünfte Dimension enthält. Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Teilchen nehmen hierbei auch in elektromagnetischen Feldern die Gestalt von Gleichungen geodätischer Linien an. Wenn dieselben als Strahlengleichungen gedeutet werden, indem die Materie als eine Art Wellenausbreitung betrachtet wird, kommt man fast von selbst zu einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Wellengleichung angesehen werden kann. Werden nun solche Lösungen dieser Gleichung betrachtet, bei denen die fünfte Dimension rein harmonisch auftritt mit einer bestimmten mit der Planckschen Konstante zusammenhängenden Periode, so kommt man eben zu den obenerwähnten quantentheoretischen Methoden.

§ 1. Fünfdimensionale Relativitätstheorie. Ich fange damit an, eine kurze Darstellung von der fünfdimensionalen Relativitätstheorie zu geben, die sich nahe an die Theorie von Kaluza anschließt, aber in einigen Punkten von derselben abweicht.

Betrachten wir ein fünfdimensionales Riemannsches Linienelement, für welches wir einen vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn postulieren. Wir schreiben dasselbe:

$$d\sigma = \sqrt{\Sigma \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k}, \tag{1}$$

wo das Zeichen Σ, wie überall im folgenden, eine Summation über die doppelt vorkommenden Indizes von 0 bis 4 angibt. Hierbei bezeichnen $x^0 \ldots x^4$ die fünf Koordinaten des Raumes. Die 15 Größen γ_{ik} sind die kovarianten Komponenten eines fünfdimensionalen symmetrischen Tensors. Um von denselben zu den Größen g_{ik} und φ_i der gewöhnlichen Relativitätstheorie zu kommen, müssen wir gewisse spezielle Annahmen machen. Erstens müssen vier der Koordinaten, sagen wir x^1, x^2, x^3, x^4, stets den gewöhnlichen Zeitraum charakterisieren. Zweitens dürfen die Größen

[1]) Th. Kaluza, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1921, S. 966.
[2]) L. de Broglie, Ann. d. Phys. (10) **3**, 22, 1925. Thèses, Paris 1924.
[3]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361 und 489, 1926.

γ_{ik} nicht von der fünften Koordinate x^0 abhängen. Hieraus folgt, daß die erlaubten Koordinatentransformationen sich auf die folgende Gruppe beschränken [1]):

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= x^{0\prime} + \psi_0(x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}, x^{4\prime}), \\ x^i &= \psi_i(x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}, x^{4\prime}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Eigentlich hätten wir in der ersten Gleichung Konstante mal $x^{0\prime}$ anstatt $x^{0\prime}$ schreiben sollen. Die Beschränkung auf den Wert Eins der Konstante ist ja aber ganz unwesentlich.

Wie man leicht zeigt, bleibt γ_{00} bei den Transformationen (2) invariant. Die Annahme $\gamma_{00} = \text{Const.}$ ist deshalb zulässig. Die Vermutung liegt nahe, daß nur die Verhältnisse der γ_{ik} einen physikalischen Sinn haben. Dann ist diese Annahme nur eine immer mögliche Konvention. Indem wir die Maßeinheit von x^0 vorläufig unbestimmt lassen, setzen wir:

$$\gamma_{00} = \alpha. \tag{3}$$

Man zeigt ferner, daß die folgenden Differentialgrößen bei den Transformationen (2) invariant bleiben, nämlich [1]):

$$d\vartheta = d x^0 + \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}} d x^i, \tag{4}$$

$$d s^2 = \left(\gamma_{ik} - \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}\right) d x^i d x^k. \tag{5}$$

In diesen Ausdrücken soll über die doppelt vorkommenden Indizes von 1 bis 4 summiert werden. Bei solchen Summen wollen wir, wie üblich, das Summenzeichen fortlassen. Die Größen $d\vartheta$ und ds hängen in der folgenden Weise mit dem Linienelement $d\sigma$ zusammen:

$$d\sigma^2 = \alpha\, d\vartheta^2 + d s^2. \tag{6}$$

Auf Grund der Invarianz von $d\vartheta$ und γ_{00} folgt nun, daß die vier γ_{0i} ($i \neq 0$), wenn x^0 festgehalten wird, sich wie die kovarianten Komponenten eines gewöhnlichen Vierervektors transformieren. Wenn x^0 mittransformiert wird, tritt noch der Gradient eines Skalars additiv hinzu. Dies bedeutet, daß die Größen:

$$\frac{\partial \gamma_{0i}}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma_{0k}}{\partial x^i}$$

[1]) Vgl. H. A. Kramers, Proc. Amsterdam **23**, Nr. 7, 1922, wo eine an die nun folgenden Betrachtungen erinnernde Überlegung mit einem einfachen Beweis für die Invarianz von $d\vartheta$ und ds^2 gegeben ist.